Wydział Matematyczno-Przyrodniczy. Szkoła Nauk Ścisłych
Uniwersytet Kardynała Stefana Wyszyńskiego w Warszawie

INTERNETOWA PRZYGODA Z MATEMATYKĄ

ZESTAW ZADAŃ – FINAŁ

25 MARCA 2017 GODZ. 10:00

(150 MINUT)

ROZWIĄZANIA

Arkusz zawiera 6 stron (łącznie z tą stroną). Sprawdź, czy arkusz jest kompletny. Ewentualne braki zgłoś przewodniczącemu komisji.

INSTRUKCJA

Uzupełnij wszystkie wymagane informacje na tej stronie oraz umieść swoje imię i nazwisko na górze każdej strony.
Zestaw składa się z 5 zadań otwartych. Rozwiązania wpisuje się w miejscu przygotowanym pod zadaniami.

Rozwiązania powinny być czytelne, a sposób rozwiązania dokładnie i precyzyjnie opisany. Do zadań należy dołączyć odpowiedzi.

Uwaga!

Czas przeznaczony na rozwiązanie wszystkich zadań to 150 minut.
Nie wolno korzystać z książek, notatek, telefonów komórkowych i innych urządzeń służących do komunikowania się na odległość, ani kalkulatora naukowego. Posiadanie wyżej wymienionych będzie skutkowało dyskwalifikacją.

Arkusz konkursowy wypełniamy długopisem

1. a) Funkcja $f(x)$ jest zdefiniowana na symetrycznym przedziale $(-a,a)$.
Wykaż, że funkcja $\varphi_1(x) = f(x) + f(-x)$ jest funkcją parzystą oraz $\varphi_2(x) = f(x) - f(-x)$ jest funkcją nieparzystą.

b) Czy z faktu, że dowolna funkcja $f(x)$ jest malejąca na odcinku (c,d) wynika, iż funkcja $\sigma(x) = f^2(x)$ jest także malejąca na tym odcinku? Odpowiedź uzasadnij.

ROZWIĄZANIE

Powiemy, że funkcja $f(x)$ jest:

- **parzysta**, jeżeli spełnia równanie $f(x) = f(-x)$ (symetria względem zmiany znaku argumentu);
- **nieparzysta**, jeżeli spełnia równanie $f(-x) = -f(x)$ (symetria względem jednoczesnej zmiany znaku argumentu i wartości funkcji).

a) Należy pokazać, że $\varphi_1(x) = \varphi_1(-x)$:

$$\varphi_1(-x) = f(-x) + f(x) = f(x) + f(-x) = \varphi_1(x)$$

$\square$

Dla funkcji φ_2 należy sprawdzić, czy $-\varphi_2(x) = \varphi_2(-x)$:

$$-\varphi_2(x) = -(f(x) - f(-x)) = f(-x) - f(x) = \varphi_2(-x)$$

$\square$

Odpowiedź: Funkcja φ_1 jest funkcją parzystą, zaś funkcja φ_2 jest funkcją nieparzystą.

b) **Nie**. Wystarczy podać kontrprzykład.
Ustalmy funkcję $f\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ taką, że

$$f(x) = -x\,.$$

Jest to funkcja malejąca ($\forall_{x\in[0,1]}\ f'(x) = -1 < 0$). Stąd mamy, że

$$\sigma(x) = f^2(x) = (-x)^2 = x^2\,.$$

Zauważmy, że:

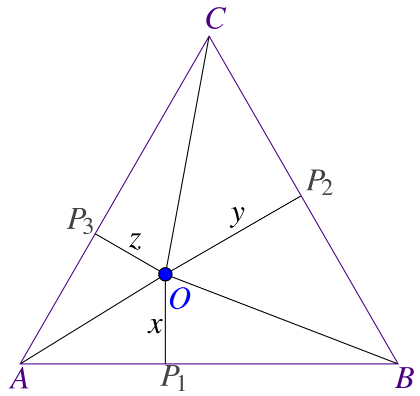
$$\forall_{x\in(0,1]}\ \sigma'(x) = 2x > 0\,,$$

natomiast dla $x = 0$ funkcja osiąga ekstremum (minimum).
Zatem funkcja σ nie jest już funkcją malejącą dla $x \in [0,1]$.

$\square$

2. Udowodnij, ze suma odległości od dowolnego punktu należącego do trójkąta równobocznego do jego boków jest równa długości wysokości tego trójkąta.

ROZWIĄZANIE



Niech O będzie dowolnie wybranym punktem należącym do wnętrza trójkąta ABC.
Z uwagi, że jest to trójkąt równoboczny mamy, że:

$$|AB| = |BC| = |AC| = a > 0$$

Punkt O łączymy z wierzchołkami trójkąta oraz prowadzimy odcinki OP_1, OP_2, OP_3 prostopadłe do odpowiednich boków trójkąta tak, aby były one wysokościami trójkątów, odpowiednio, AOB, BOC, AOC.

Oznaczmy $|OP_1| = x$, $|OP_2| = y$, $|OP_3| = z$. Są to odległości od punktu O do kolejnych boków trójkąta.

Zauważmy, że

$$P_{\triangle ABC} = P_{\triangle AOB} + P_{\triangle BOC} + P_{\triangle AOC}.$$

$$P_{\triangle ABC} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4} \qquad P_{\triangle AOB} = \frac{1}{2}ax \qquad P_{\triangle BOC} = \frac{1}{2}ay \qquad P_{\triangle AOC} = \frac{1}{2}az$$

Zatem

$$\begin{aligned} \frac{a^2\sqrt{3}}{4} &= \frac{1}{2}ax + \frac{1}{2}ay + \frac{1}{2}az \\ &= \frac{a}{2}(x+y+z) \end{aligned}$$

Stąd

$$x + y + z = \frac{a}{2}\sqrt{3}$$

□

Odpowiedź: Suma odległości od dowolnego punktu należącego do trójkąta równobocznego do jego boków jest równa długości wysokości tego trójkąta.

3. Suma nieskończonego ciągu malejącego jest równa największej wartości funkcji $f(x) = x^3 + 3x - 9$ na odcinku $[-2,3]$. Różnica pomiędzy pierwszym, a drugim wyrazem jest równa $f'(0)$.
Znaleźć iloraz tego ciągu geometrycznego.

ROZWIĄZANIE

Policzmy pochodną funkcji $f(x)$:

$$f'(x) = 3x^2 + 3$$

Sprawdzamy, kiedy pochodna się zeruje:

$$f'(x) = 0 \iff 3x^2 + 3 = x^2 + 1 = 0, \text{ ale } x^2 + 1 > 0 \text{ dla dowolnych } x \in \mathbb{R}$$

Ustaliliśmy, że dla wszystkich rzeczywistych wartości x pochodna funkcji f jest większa od zera, a stąd wniosek, że funkcja f jest rosnąca na całym zbiorze liczb rzeczywistych. Z tego wynika, że w przedziale $[-2,3]$ funkcja $f(x)$ wartość największą przyjmuje w punkcie $x = 3$ i jest to $f(3) = 27$.

Suma nieskończonego ciągu malejącego dana jest wzorem

$$S = a_1 \frac{1}{1-q}, \quad \text{gdzie } |q| < 1$$

Z treści zadania wiemy, że

$$S = a_1 \frac{1}{1-q} = f(3) = 27 \tag{1}$$

oraz

$$a_1 - a_2 = f'(0) = 3 \tag{2}$$

Z uwagi, że jest to ciąg geometryczny wiemy, że $a_2 = a_1 q$ i otrzymujemy

$$\begin{aligned} a_2 &= a_1 - 3 \\ a_1 q &= a_1 - 3 \\ a_1 q - a_1 &= -3 \\ a_1(q-1) &= -3 \\ a_1(1-q) &= 3 \\ a_1 &= \frac{3}{(1-q)} \end{aligned}$$

Podstawiamy a_1 do równania (1). Dostajemy:

$$\frac{3}{(1-q)} \cdot \frac{1}{(1-q)} = \frac{3}{(1-q)^2} = 27$$

Stąd

$$\frac{1}{(1-q)^2} = 9 \Rightarrow (1-q)^2 = \frac{1}{9} \iff \left(1-q = \frac{1}{3}\right) \vee \left(1-q = -\frac{1}{3}\right) \iff q = \frac{2}{3} \vee q = \frac{4}{3}.$$

$q = \frac{4}{3}$ nie spełnia założenia $|q| < 1$, stąd $q = \frac{2}{3}$.

Odpowiedź: Iloraz tego ciągu geometrycznego to $q = \dfrac{2}{3}$.

4. Znajdź liczbę trzycyfrową, jeżeli jest wiadomo, że suma jej cyfr wynosi 17, suma kwadratów jej cyfr wynosi 109. Natomiast, jeśli od tej liczby odejmiemy 495, to otrzymamy liczbę składającą się z tych samych cyfr zapisanych w odwrotnej kolejności.

ROZWIĄZANIE

Wprowadźmy oznaczenia:

x - cyfra setek

y - cyfra dziesiątek

z - cyfra jedności

Z treści zadania otrzymujemy do rozwiązania układ trzech równań:

$$\begin{cases} x+y+z=17 \\ x^2+y^2+z^2=109 \\ 100x+10y+z-495=100z+10y+x \end{cases}$$

z ograniczeniem: x,y,z sa liczbami naturalnymi oraz $x,z \neq 0$.

Z (iii) mamy, że $99x-99z=495 \Rightarrow x-z=5 \Rightarrow z=x-5$.
Z (i) mamy, że $x+y+z=17 \Rightarrow x+y+z-5=17 \Rightarrow 2x+y=22 \Rightarrow y=22-2x$.
Zauważmy, że:

$$(x+y+z)^2 = x^2+y^2+z^2+2(xy+yz+xz).$$

Stąd

$$\begin{aligned} 17^2 &= 109+2(xy+yz+xz) \\ 180 &= 2(xy+yz+xz) \\ 90 &= xy+yz+xz \end{aligned}$$

Podstawiamy za $z=x-5$ oraz $y=22-2x$ i otrzymujemy:

$$\begin{aligned} 90 &= x(22-2x)+(22-2x)(x-5)+x(x-5) \\ 90 &= 22x-2x^2+22x-110-2x^2+10x+x^2-5x \\ 90 &= -110+49x-3x^2 \\ 0 &= -200+49x-3x^2 \end{aligned}$$

Należy teraz znaleźć pierwiastki funkcji kwadratowej $-3x^2+49x-200$:

$\Delta = 49^2-4\cdot(-3)\cdot(-200) = 2401-2400 = 1 \Rightarrow \sqrt{\Delta}=1$ Istnieją dwa rozwiązania:

$$\begin{cases} x_1 = \dfrac{-49+1}{-6} = 8 \\ \\ x_2 = \dfrac{-49-1}{-6} = \dfrac{50}{6} \notin \mathbb{N} \end{cases}$$

Z czego jedno nie spełnia warunków zadania. Wnioskujemy, iż szukaną cyfrą setek jest 8.
Na podstawie tego otrzymujemy $y=22-2x=22-16=6$ oraz $z=x-5=8-5=3$.

Odpowiedź: Szukaną liczbą jest 863.

5. Niech n i k będą liczbami całkowitymi dodatnimi.
Mamy nk przedmiotów o tych samych rozmiarach oraz k pudełek, do których możemy włożyć n przedmiotów. Każdy przedmiot jest pokolorowany jednym z k różnych kolorów. Wykazać, że można rozmieścić te przedmioty w pudełkach w taki sposób, że w każdym pudełku znajdą się przedmioty w co najwyżej dwóch kolorach.

Rozwiązanie

Przeprowadźmy dowód indukcyjny ze względu na k.
Ustalmy $k = 1$: zatem mamy n przedmiotów i 1 pudełko mieszczące n przedmiotów. Wszystkie przedmioty są w jednym kolorze i mieszczą się do jednego pudełka. Teza dla $k = 1$ jest prawdziwa.
Zakładamy, że teza jest prawdziwa dla pewnego k.
Należy pokazać, że mając $k+1$ kolorów i $k+1$ pudełek można dokonać rozmieszczenia w podany sposób.

Wszystkich przedmiotów jest $n(k+1)$. Wnioskujemy, że pewnego koloru (załóżmy, że jest to kolor biały) jest co najwyżej n oraz przedmiotów innego koloru (załóżmy, że czarnego) jest co najmniej n.

Wkładamy wszystkie przedmioty białe do pudełka. Jest ich mniej niż n, więc w pudełku pozostaje wolne miejsce. Uzupełniamy je przedmiotami czarnymi. Jest ich co najmniej n.

W pudełku mamy zatem n przedmiotów w dwóch rożnych kolorach. Do wypełnienia pozostało k pudełek z nk przedmiotami w k kolorach.

Odpowiedź: Na mocy założenia indukcyjnego takie rozmieszczenie jest możliwe.

$\square$